

Лекция 7. Графы. Числа Рамсея. Верхняя и нижняя оценки чисел Рамсея.

Лектор — д.ф.-м.н. Селезнева Светлана Николаевна

Лекции по «Дискретным моделям».
Магистратура, 1-й курс,
факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте <http://mk.cs.msu.su>

Числа Рамсея

Граф $\bar{G} = (V, \bar{E})$ — **дополнительный** к графу $G = (V, E)$, если $\bar{E}$ состоит из всех тех ребер, которых нет в E , т.е.

$$\bar{E} = \{(v, w) \mid v, w \in V, v \neq w, (v, w) \notin E\}.$$

Число $R(m, n)$ — такое наименьшее число x , что для любого графа G с x вершинами:

либо в G есть подграф K_m ,

либо в $\bar{G}$ есть подграф K_n .

Числа Рамсея

Раскраска ребер графа $G = (V, E)$ в два цвета — отображение $\rho : E \rightarrow \{1, 2\}$.

Число $R(m, n)$ — такое наименьшее число x , что при любой раскраске ребер полного графа K_x в два цвета либо в нем найдется подграф K_m с ребрами цвета 1, либо в нем найдется подграф K_n с ребрами цвета 2.

Верхняя оценка числа Рамсея

Верны равенства: $R(1, n) = R(m, 1) = 1$ и $R(m, n) = R(n, m)$.

Теорема 1. При $m, n \geq 2$ справедливо неравенство

$$R(m, n) \leq R(m-1, n) + R(m, n-1).$$

Доказательство.

Положим $x = R(m-1, n) + R(m, n-1)$.

Рассмотрим произвольную раскраску ребер полного графа K_x в цвета 1 и 2.

Из произвольной вершины v графа K_x исходит
либо $R(m-1, n)$ ребер цвета 1,
либо $R(m, n-1)$ ребер цвета 2.

Случаи аналогичны, рассмотрим один из них.

Верхняя оценка числа Рамсея

Доказательство.

1. Пусть из вершины v графа K_x исходит $R(m-1, n)$ ребер цвета 1.

Положим V — множество из $y = R(m-1, n)$ концов этих ребер. Множество V вместе с соединяющими их ребрами образуют полный подграф K_y графа K_x .

По определению числа $R(m-1, n)$ в графе K_y найдется либо полный подграф K_n с ребрами цвета 2, либо полный подграф K_{m-1} с ребрами цвета 1.

В первом случае этот полный подграф K_n с ребрами цвета 2 есть и в графе K_x .

Во втором случае добавим к этому полному подграфу K_{m-1} вершину v и получим полный подграф K_m с ребрами цвета 1 в графе K_x . □

Верхняя оценка числа Рамсея

Следствие 1. При $m, n \geq 1$ справедливо неравенство

$$R(m, n) \leq C_{m+n-1}^{m-1}.$$

Доказательство: индукция по m .

Базис индукции $m = 1$ верен.

Индуктивный переход: по теореме 1 получаем

$$\begin{aligned} R(m-1, n) &\leq R(m-1, n) + R(m, n-1) \leq \\ &\leq C_{m+n-2}^{m-2} + C_{m+n-2}^{m-1} = C_{m+n-1}^{m-1}. \end{aligned}$$



Нижняя оценка числа Рамсея

Теорема 2 (Эрдеша). При $k \geq 2$ справедливо неравенство

$$R(k, k) \geq 2^{k/2}.$$

Доказательство. Рассмотрим $k \geq 3$, т.к. $R(2, 2) = 2$.

Оценим долю $\gamma(p, k)$ графов с p помеченными вершинами, в которых найдется полный подграф с k вершинами.

Возможных ребер в графах с p вершинами ровно C_p^2 , откуда графов с p вершинами в точности $2^{C_p^2}$.

Выбрать k вершин, образующих полный подграф, из p вершин можно C_p^k способами.

Оставшиеся $C_p^2 - C_k^2$ ребра могут быть проведены произвольно.

Поэтому число графов с p вершинами, содержащих полный подграф с k вершинами, не более $C_p^k \cdot 2^{C_p^2 - C_k^2}$.

Нижняя оценка числа Рамсея

Доказательство. Значит,

$$\gamma(p, k) \leq \frac{C_p^k \cdot 2^{C_p^2 - C_k^2}}{2^{C_p^2}} = \frac{p^k}{k! 2^{C_k^2}}.$$

При $p < 2^{k/2}$ получаем

$$\gamma(p, k) < \frac{2^{k^2/2}}{k! 2^{k^2/2 - k/2}} = \frac{2^{k/2}}{k!} < \frac{1}{2}.$$

Нижняя оценка числа Рамсея

Доказательство.

Разобьем все графы с p вершинами на пары $(G, \bar{G})$.

Тогда по доказанному выше при $p < 2^{k/2}$ в этом разбиении найдется такая пара графов $(G, \bar{G})$, что ни G , ни $\bar{G}$ не содержат полный подграф с k вершинами.

Отсюда $R(k, k) \geq 2^{k/2}$.



Нижняя оценка числа Рамсея

Следствие 2. При $m, n \geq 2$ справедливо неравенство

$$R(m, n) \geq 2^{\min(m, n)/2}.$$

Задачи

1. Найти значение числа Рамсея:

- 1) $R(2, 2)$;
- 2) $R(2, 3)$;
- 3) $R(2, 4)$;
- 4) $R(2, 5)$.

Ответ обосновать.

2. Обосновать, что:

- 1) $R(3, 3) > 5$;
- 2) $R(3, 4) > 8$.

Конец лекции 7